



PRESENTATION ON DIFFERENTIAL EQUATION

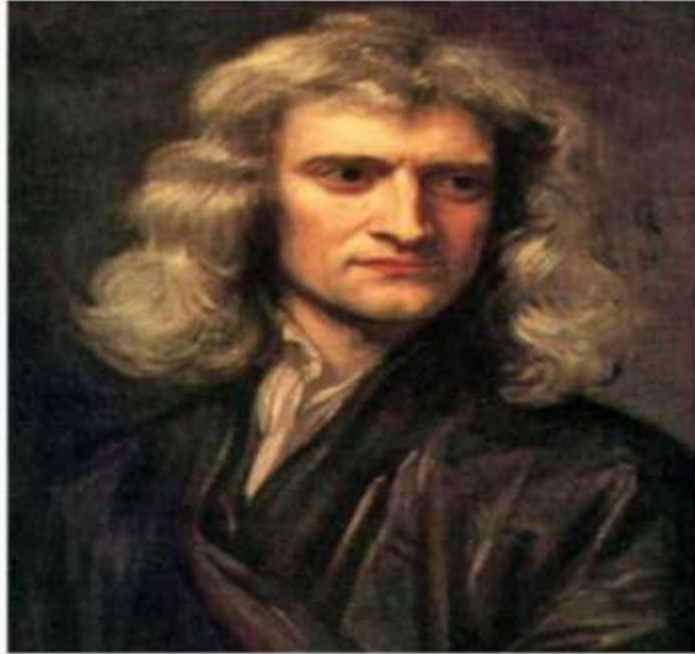


Кафедра вищої та прикладної математики

к. ф.-м. наук, доцент Михайленко С.В.



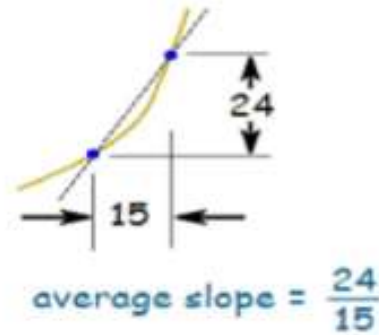
OUR GRATITUDE AND RESPECT



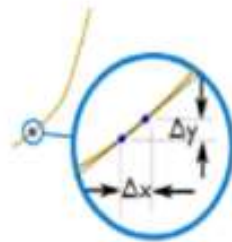
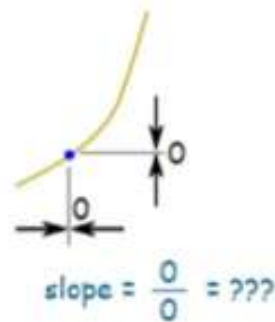
Sir Isaac Newton and Gottfried
Leibniz



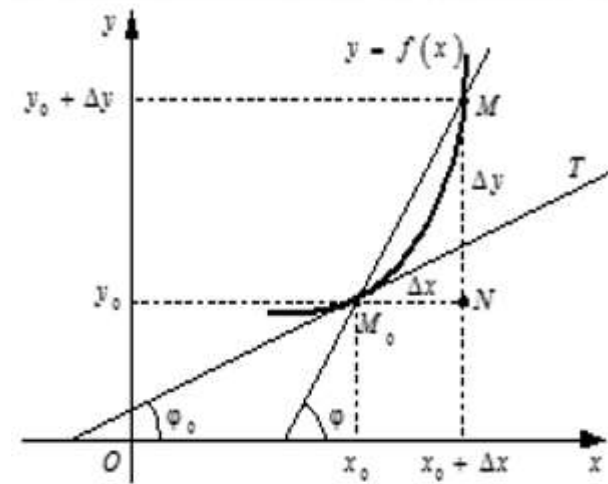
Slope and Rate of change



$$\text{Slope} = \frac{\text{Change in Y}}{\text{Change in X}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$





- A mathematical **equation** that relates a function with its derivatives is called **differential equation**,
- the function usually represent physical quantities,
- derivatives represent its rate of change
- **differential equation** defines a relationship between the two.

Означення. Диференціальним рівнянням n -го порядку відносно функції $y = y(x)$ називається співвідношення, яке пов'язує незалежну змінну x , шукану функцію $y(x)$ та її похідні (або диференціали):

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

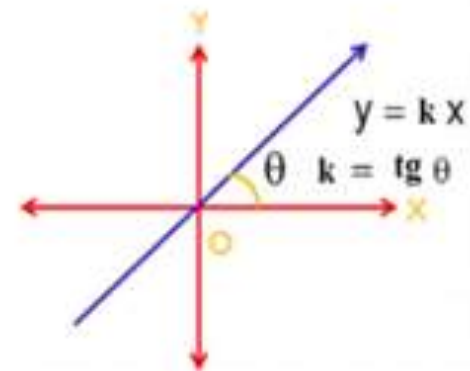


ФОРМУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

differential (derivative) equation

$$\therefore \frac{dy}{dx} = k \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$
$$\Rightarrow x \frac{dy}{dx} = y$$

Сім'я прямих
 $y = kx$





Order and Degree

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 4x^3 - 24$$

Order 2 (pointing to $\frac{d^2y}{dx^2}$) Degree 3 (pointing to $4x^3$)

Order

The Order is the **highest derivative**

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy = \sin(x)$$

This has a second derivative $\frac{d^2y}{dx^2}$, so is "Order 2"

Degree

The degree is the exponent of the highest derivative.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = 5x^2$$

The highest derivative is just dy/dx , and it has an exponent of 2, so this is "Second Degree"

In fact it is a **First Order Second Degree Ordinary Differential Equation**

Означення. Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної (або диференціала), що входить в це рівняння.

Якщо невідома функція залежить тільки від однієї змінної, то диференціальне рівняння називається звичайним.



Solution of a Differential Equation

The solution of a differential equation is the relation between the variables, not taking the differential coefficients, satisfying the given differential equation and containing as many arbitrary constants as its order is.

For example: $y = A\cos x - B\sin x$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$$



Автомобіль рухається по прямолінійному шосе в напрямку міста А із сталою швидкістю v . Через який час він прибуде до міста А?

s - шлях, який пройде автомобіль з початку спостереження;

t – час;

$$s'(t) = v$$

$$s(t) = vt + C, C \text{ — довільна константа;}$$

C = визначається через початкову відстань автомобіля від А - S_0



General Solution

If the solution of a differential equation of n th order contains n arbitrary constants, the solution is called the general solution.

$$y = A \cos x - B \sin x$$

is the general solution of the differential equation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$$

Particular Solution

A solution obtained by giving particular values to the arbitrary constants in general solution is called particular solution.

$$y = 3 \cos x - 2 \sin x$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0.$$



Variable Separable

The first order differential equation

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

Suppose we can write the above equation as

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

$$\frac{1}{h(y)} dy = g(x) dx$$

On Integrating, we get the solution as

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx + c$$

SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATION

Homogeneous Differential Equations

A first order Differential Equation is **Homogeneous** when it can be in this form:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

We can solve it using Separation of Variables but first we create a new variable $v = \frac{y}{x}$

$$\Rightarrow v = \frac{y}{x} \text{ is also } y = vx$$

$$\Rightarrow \text{And } \frac{dy}{dx} = \frac{d(vx)}{dx} = v \frac{dx}{dx} + x \frac{dv}{dx} \text{ (by the Product Rule)}$$

$$\Rightarrow \text{Which can be simplified to } \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

Using $y = vx$ and $\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$ we can solve the Differential Equation.



Solving :

- We **solve** it when we discover the **function y** (or set of functions y).
- There are many "tricks" to solving Differential Equations (if they can be solved!), but first: why?



Why Are Differential Equations Useful?

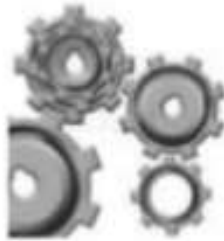
- In our world things change, and **describing how they change** often ends up as a Differential Equation:



Differential Equation



Economics



Mechanics



Engineering

$$y'' + 2y' + y^{\frac{d^n y}{dx^n}} = 0$$

$$\overset{\text{FUNCTION}}{y = e^{x^2}} \equiv f(x)$$

$$(-\infty, \infty)$$

$$\mathbb{R}$$

DERIVATIVE S

$$\frac{dy}{dx} = 2xe^{x^2}$$



Chemistry



Biology



$$\ddot{x} = a$$



ПРИКЛАДИ ЗАДАЧ, ЗВЕДЕНИХ ДО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ (3)

З урахуванням механічного змісту другої похідної (прискорення), рівняння прямолінійного рівноприскореного руху записується у формі $\ddot{x} = a$ (точками будемо надалі позначати похідні за часом). Послідовне інтегрування останнього рівняння в межах від 0 до t дає

$$\dot{x} = at + v_0 \quad (v_0 = \dot{x}(0)), \quad x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0 \quad (x_0 = x(0)).$$

к.ф.-м.н., доц. Мисийленко С.В.

$$y' = y$$



ПРИКЛАДИ ЗАДАЧ, ЗВЕДЕНИХ ДО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ (2)

Чудовою властивістю функції $y = e^x$ є те, що вона збігається зі своєю похідною; ця властивість записується у вигляді звичайного диференціального рівняння $y' = y$, розв'язками якого, разом із функцією $y = e^x$, будуть також усі функції сім'ї $y = Ce^x$.

к.ф.-м.н., доц. Мисийленко С.В.



ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ МОДЕЛІ

У процесі побудови звичайних диференціальних моделей важливого значення, а інколи й головного, набуває знання законів тієї галузі науки, з якою пов'язана природа досліджуваної задачі. Так, наприклад, у механіці це можуть бути *закони Ньютона*, в теорії електричних ланцюгів – *закони Ома та Кірхгофа*, в теорії швидкостей хімічних реакцій – *закон дії мас* тощо.

$$m \frac{dv}{dt} = F$$



ПРИКЛАДИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ

Приклад 1. З деякої висоти скинуто тіло, маса якого m . Потрібно встановити, за яким законом змінюється швидкість падіння цього тіла, якщо на нього, крім сили тяжіння, діє гальмівна сила опору повітря, пропорційна швидкості.

Розглянемо *динамічну модель падіння тіла*.

Згідно другого закону Ньютона $m \frac{dv}{dt} = F$.

У даному випадку $F = mg - kv$, де $k > 0$, тобто

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv.$$

Розв'язком цього рівняння є функція

$$v = c \cdot e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}, \quad c = \text{const}$$



ПРИКЛАДИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ

Приклад 2 *Тіло підігріте до 100° , температура навколишнього середовища 20° . За 5 хвилин тіло охолоне до 60° . За скільки часу тіло охолоне до 30° ?*



Sir Issac Newton

“ The rate of cooling of a body is proportional to the difference between its temperature and the temperature of the surrounding air ”



Розглянемо *динамічну модель процесу охолодження*.

Скористаємося *законом Ньютона про охолодження тіла*. Позначимо

t температуру тіла, τ – час від початку охолодження. Тоді

$$\frac{dt}{d\tau} = -k(t - t_c),$$

де t_c – температура середовища, $k > 0$, оскільки ми розглядаємо охолодження тіла, тому функція $t(\tau)$ є спадною і похідна від'ємна.

Розв'язок рівняння (2) має вигляд

$$t = t_c + c \cdot e^{-k\tau}, \quad c = \text{const}.$$

Нехай t_0 – початкова температура тіла. Підставляючи в обидві частини рівняння (3) $\tau = 0$, отримаємо

$$t_0 = t_c + c, \quad c = t_0 - t_c.$$

Таким чином, рівняння охолодження тіла приймає вигляд

$$t = t_c + (t_0 - t_c) \cdot e^{-k\tau}.$$

За умовами задачі $t_c = 20^0$, $t_0 = 100^0$, крім того $t(5) = 60^0$. Отже

$$60 = 20 + 80 \cdot e^{-5k}, \quad e^{-5k} = 0,5, \quad k = -\frac{\ln 0,5}{5}.$$

Підставимо k в рівняння та знайдемо час, за який тіло охолоне до 30^0 :

Отже, тіло охолоне до 30^0 за 15 хвилин.



ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ В ЕКОЛОГІЇ (1)

"Rabbits"

The more rabbits we have the more baby rabbits we get. Then those rabbits grow up and have babies too! The population will grow faster and faster.



Екологія вивчає взаємовідносини людини й живих організмів узагалі з навколишнім середовищем. Основним об'єктом дослідження в екології є еволюція популяцій (сукупності одного виду рослин, тварин, мікроорганізмів, що населяють тривалий час певну територію).

Опишемо математично процес розмноження чи вимирання популяцій. Нехай $x(t)$ – кількісний стан популяції в момент t ; A – кількість народжених, B – умираючих за одиницю часу. Тоді швидкість зміни координати $x(t)$ задається формулою

$$\frac{dx}{dt} = A - B. \quad (1)$$

У рівнянні (1) A і B можуть залежати від x . Наприклад,

$$A = ax, B = bx, \quad (2)$$

де a – коефіцієнт народжуваності, b – смертності.

Підставляючи (2) в (1), отримаємо

$$\frac{dx}{dt} = (a - b)x. \quad (3)$$

Розв'язок диференціального рівняння (3) запишемо у вигляді

$$x(t) = x_0 e^{(a-b)(t-t_0)}, \quad (4)$$

де $x(t_0) = x_0$ – кількісний стан популяції в початковий момент t_0 .



ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ В ЕКОЛОГІЇ (2)



Можна досліджувати й складніші рівняння та системи рівнянь.

Розглянемо детальніше двовидову модель хижак-жертва, побудовану для виявлення коливань рибних уловів у Адріатичному морі.

Нехай $x(t)$ – кількість риб-хижаків, $y(t)$ – риб-жертв у момент часу t . Кількість риб-хижаків буде зростати доти, поки в них буде їжа. Якщо її не буде вистачати, то кількість хижаків буде зменшуватися і, починаючи з деякого моменту, буде зростати кількість жертв. Модель такого процесу має вигляд

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax + bxy, \\ \frac{dy}{dt} = cx - dxy, \end{cases}$$

де a, b, c, d – додатні константи.

У системі доданок bxy виражає залежність приросту кількості хижаків від кількості жертв, $-dxy$ – зменшення кількості жертв від кількості хижаків.



ОСНОВНІ ОБ'ЄКТИ ТЕОРІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

➤ ЗВИЧАЙНІ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

➤ СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

➤ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ
ПОХІДНИМИ

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$x \frac{dy}{dx} = y - 1$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax + bxy \\ \frac{dy}{dt} = cx - dxy \end{cases}$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial x} + 2 = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2 \frac{\partial u}{\partial t}$$



Thank you

